Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Andrea Nardi

Tutorato 5 - 19 Novembre 2013

1. Sia
$$f(x) := \int_0^{\infty} \frac{\arctan(xt)}{t^3+t}dt.$$
   (a) Provare che $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$;
   (b) Calcolare esplicitamente $f'(x)$;
   (c) Trovare un'espressione esplicita per $f(x)$.

2. Sviluppare le seguenti funzioni (estese per periodicitá al di fuori dell'intervallo $[-\pi,\pi]$) in serie di Fourier:
   (a) $f_1(x) = |x|$
   (b) $f_2(x) = e^x$
   (c) $f_3(x) = (\pi - |x|)^2$
   (d) $f_4(x) = \sin(x)\cos(x)$
   (e) $f_5(x) = x^3$
   (f) $f_6(x) = \sin^2(x)$

3. Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) := x^2$ (estesa per periodicitá al di fuori dell'intervallo $[-\pi,\pi]$) e dedurre che:
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

4. Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) := max\{\sin(x), 0\}$ (estesa per periodicitá al di fuori dell'intervallo $[-\pi,\pi]$) e dedurre che
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{2-\pi}{4}$

5. Calcolare il valore di
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

6. Mediante lo sviluppo in serie di Fourier di
$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-\pi, 0) \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ e se } x = \pi \\ 1 & \text{se } x \in (0,\pi) \end{cases}$$
(prolungata con periodicitá ad $\mathbb{R}$) determinare il valore di
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$